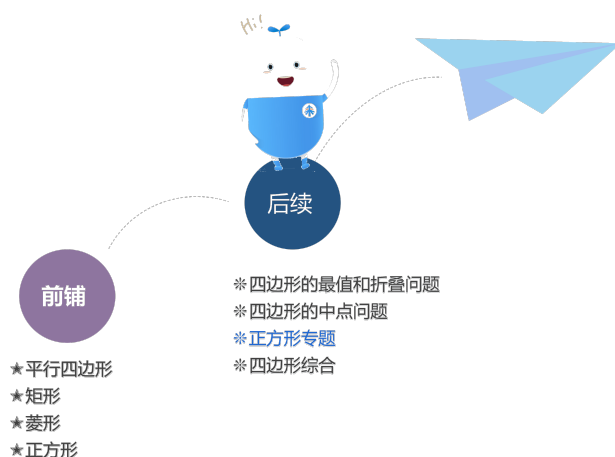
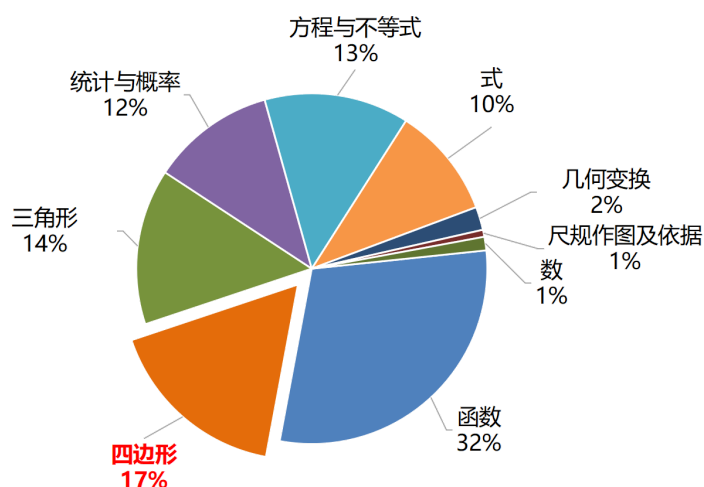


# 第1讲 正方形中的悬挂与手拉手模型

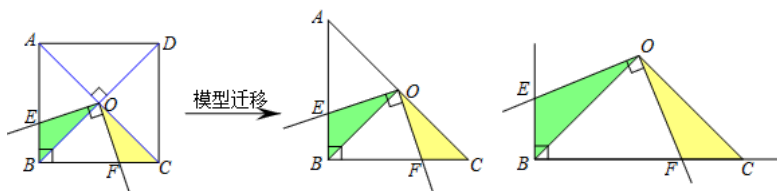
平行四边形属于人教版第十八章的内容，是期中、期末考试的重要知识点，主要考察平行四边形的性质和判定，故这部分我们分为《平行四边形》、《四边形的最值和折叠问题》、《四边形的中点问题》、《正方形专题》、《四边形综合》五个模块。本模块为《正方形专题》，旨在帮助学生了解正方形常见的四个模型与常考题型，理清解题思路。

本模块难度较大，适用于四边形综合的专项提升，本模块分为正方形中的三垂直与半角模型、正方形中的悬挂与手拉手模型2讲内容，帮助学生梳理综合题的解题思路，学会将所学知识进行综合运用。

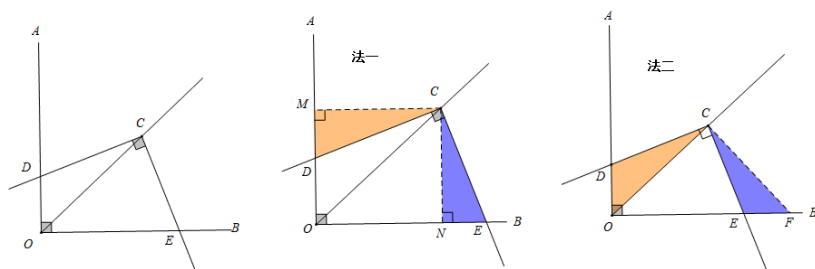


# 一、 对角互补模型

模型一：正方形ABCD，对角线AC、BD交于点O， $\angle EOF = 90^\circ$ ，与正方形两边分别交于点E、F。



模型变式1：【已知】 $\angle AOB = \angle DCE = 90^\circ$ ，OC平分 $\angle AOB$ ，D、E在OA、OB上。



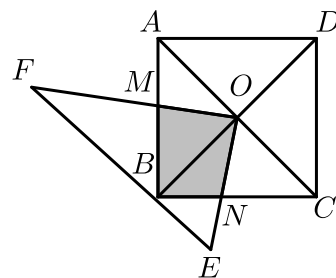
## 【教法备注】

结论：

- (1)  $CD = CE$ ;
- (2)  $OD + OE = OM + ON = \sqrt{2}OC$ ;
- (3)  $S_{\text{四边形}ODCE} = S_{\triangle OCE} + S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2}OC^2$ .

## 例题1

1. 如图，正方形ABCD的对角线相交于点O， $\text{Rt}\triangle OEF$ 绕点O旋转，在旋转过程中，两个图形重叠部分的面积是正方形面积的（ ）。



- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{3}{4}$

【答案】A

【解析】 $\because$  四边形ABCD是正方形， $OF \perp OE$ ，

$$\therefore OB = OC, \angle OBA = \angle OCB = 45^\circ, \angle BOC = \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MOB = \angle CON,$$

在 $\triangle OBM$ 与 $\triangle OCN$ 中,

$$\begin{cases} \angle OBM = \angle OCN \\ OB = OC \\ \angle MOB = \angle NOC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle OBM \cong \triangle OCN (ASA),$$

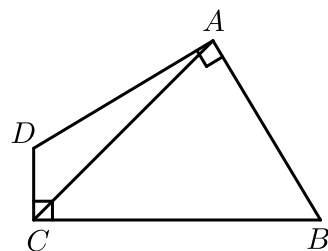
$$\therefore S_{\triangle OBM} = S_{\triangle OCN},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} OMBN} = S_{\triangle OBM} + S_{\triangle OBN} = S_{\triangle OCN} + S_{\triangle OBN} = S_{\triangle OBC} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形} ABCD}$$

即重叠部分面积不变, 总是等于正方形面积的 $\frac{1}{4}$ .

**【标注】**【知识点】对角互补模型

2. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中,  $AB = AD$ ,  $AC = 5$ ,  $\angle DAB = \angle DCB = 90^\circ$ , 则四边形 $ABCD$ 的面积为 ( ).



A. 15

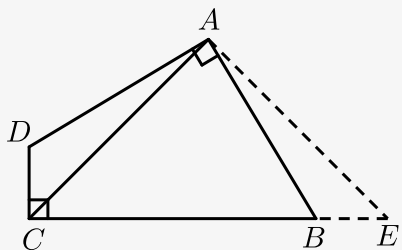
B. 12.5

C. 14.5

D. 17

**【答案】** B

**【解析】** 如图, 过 $A$ 作 $AE \perp AC$ , 交 $CB$ 的延长线于 $E$ ,



$$\therefore \angle DAB = \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D + \angle ABC = 180^\circ = \angle ABE + \angle ABC,$$

$$\therefore \angle D = \angle ABE,$$

$$\text{又} \because \angle DAB = \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle EAB,$$

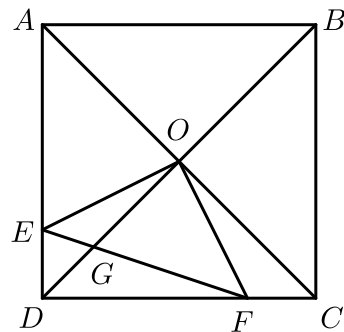
$$\text{又} \because AD = AB,$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AEB$  (ASA) ,  
 $\therefore AC = AE$  , 即  $\triangle ACE$  是等腰直角三角形 ,  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  的面积与  $\triangle ACE$  的面积相等 ,  
 $\therefore S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = 12.5$  ,  
 $\therefore$  四边形  $ABCD$  的面积为 12.5 ,  
 故选 : B .

【标注】【知识点】对角互补模型

## 例题2

3. 已知正方形  $ABCD$  , 边长为 1 ,  $E$  为  $AD$  上一动点 , 且与点  $A$ 、点  $D$  不重合 , 过  $O$  作  $OF \perp OE$  交  $CD$  于点  $F$  ,  $EF$  与  $BD$  交于点  $G$  , 则下列说法正确的有 \_\_\_\_\_ .
- ①  $OE = OF$  ; ②  $S_{\text{四边形} OEDF} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形} ABCD}$  ; ③ 当  $S_{\triangle DEF} + S_{\triangle OFC}$  最小时 ,  $AE = \frac{3}{4}$  ; ④  $OG \cdot BD = FC^2 + AE^2$



【答案】①②④

【解析】①  $\because OE \perp OF$  ,

$$\therefore \angle EOF = \angle DOC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle EOD = \angle FOC ,$$

$$\text{又} \because \angle ODE = \angle OCF = 45^\circ ,$$

$$OD = OC ,$$

$$\therefore \triangle OED \cong \triangle OFC (\text{ASA}) ,$$

$$\therefore OE = OF . \text{ 说法正确 .}$$

$$\text{②} S_{\text{四边形} OEDF} = S_{\triangle OED} + S_{\triangle ODF}$$

$$= S_{\triangle OCF} + S_{\triangle ODF}$$

$$= S_{\triangle OCD}$$

$$= \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD} . \text{说法正确} .$$

③令  $DE = CF = a$  , 则  $DF = 1 - a$  .

$$\therefore S_{\triangle DEF} + S_{\triangle OFC}$$

$$= \frac{1}{2} a(1-a) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} a$$

$$= -\frac{1}{2} a^2 + \frac{3}{4} a$$

$$= -\frac{1}{2} \left( a - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{9}{32} (0 < a < 1) ,$$

$\therefore$  当  $a = \frac{3}{4}$  时,  $S$  最大值, 而  $a \neq 0$  , 且  $a \neq 1$  .  $S$  无最小值 .

说法错误 .

④由②可知:  $\triangle OEF$  等腰三角形 ,

$$\therefore \angle OEG = \angle ODE = 45^\circ ,$$

$$\text{又} \because \angle EOG = \angle DOE ,$$

$$\therefore \triangle EOG \sim \triangle DOE ,$$

$$\therefore OG \cdot OD = OE^2 ,$$

$$BD \cdot OG = 2OD \cdot OG = 2OE^2 ,$$

$$\text{又} \because CF = DE , AE = DF ,$$

$$\therefore FC^2 + AE^2 = DE^2 + DF^2 = EF^2 = 2OE^2 ,$$

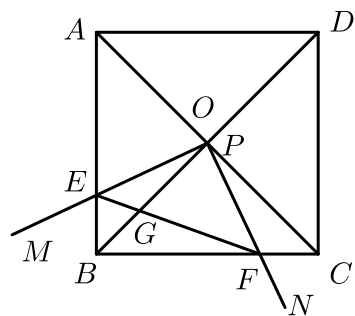
$$\therefore BD \cdot OG = FC^2 + AE^2 .$$

说法正确 .

**【标注】**【知识点】正方形与全等综合

## 练习2

4. 如图所示, 边长为1的正方形  $ABCD$  的对角线  $AC$ 、 $BD$  相交于点  $O$  . 有直角  $\angle MPN$  , 使直角顶点  $P$  与点  $O$  重合, 直角边  $PM$ 、 $PN$  分别与  $OA$ 、 $OB$  重合, 然后逆时针旋转  $\angle MPN$  , 旋转角为  $\theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) ,  $PM$ 、 $PN$  分别交  $AB$ 、 $BC$  于  $E$ 、 $F$  两点, 连接  $EF$  交  $OB$  于点  $G$  , 有下列结论:
- ①  $\triangle OEB \cong \triangle OFC$  ; ②  $EF = \sqrt{2}OE$  ; ③  $S_{\text{四边形}BEOF} : S_{\text{正方形}ABCD} = 1 : 4$  ; ④  $BE + BF = \sqrt{2}OA$  ; 其中正确的个数是 ( ) .



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】D

【解析】①∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore OB = OC, \angle OBE = \angle OCF = 45^\circ, \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOF + \angle COF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOF + \angle BOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOE = \angle COF,$$

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$$\begin{cases} \angle BOE = \angle COF \\ OB = OC \\ \angle OBE = \angle OCF \end{cases},$$

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle COF$  (ASA)，故①正确；

$$\text{②} \because OE = OF, BE = CF,$$

$$\therefore EF = \sqrt{2}OE, \text{故②正确；}$$

$$\text{③} \because S_{\text{四边形}OEBF} = S_{\triangle BOE} + S_{\triangle BOF}$$

$$= S_{\triangle BOF} + S_{\triangle COF}$$

$$= S_{\triangle BOC}$$

$$= \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}OEBF} : S_{\text{正方形}ABCD} = 1 : 4, \text{故③正确；}$$

$$\text{④} \because BE + BF = BF + CF = BC = \sqrt{2}OA, \text{故④正确；}$$

所以正确项为①②③④。

故选D。

【标注】【知识点】正方形与全等综合

5. 定义：有一组对角是直角，夹其中一个直角的两边相等，夹另一个直角的两边不相等的四边形称为准正方形．理解：如图1，若四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $CB \neq CD$ ，则四边形 $ABCD$ 是准正方形．

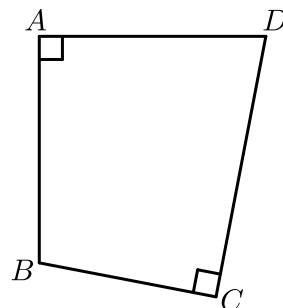


图 1

( 1 ) 判断：正方形 \_\_\_\_\_ ( 填：是或不是 ) 准正方形．

( 2 ) 探究性质：如图1．

① 若四边形 $ABCD$ 是准正方形， $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $CB \neq CD$ ，过 $A$ 作 $AM \perp BC$ 交 $CB$ 的延长线于 $M$ ，作 $AN \perp CD$ 于 $N$ ，请在图1中补画出图形，并证明四边形 $AMCN$ 为正方形．

② 求证： $AC$ 平分 $\angle BCD$ ， $BC + CD = \sqrt{2}AC$ ．

( 3 ) 应用：如图2，在平面直角坐标系中，正方形 $ABCD$ 顶点 $A$ 的坐标为 $(0, 4)$ ， $B$ 点在 $x$ 轴上，对角线 $AC$ 、 $BD$ 交于点 $M$ ， $OM = 5\sqrt{2}$ ，则点 $C$ 的坐标为 \_\_\_\_\_ ．

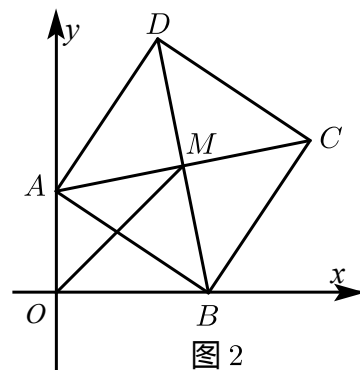


图 2

【答案】( 1 ) 不是

( 2 ) ① 画图见解析，证明见解析．

② 证明见解析．

( 3 )  $(10, 6)$

【解析】( 1 )  $\because$  正方形四条边相等，

$\therefore$  不符合要求．

( 2 ) ①

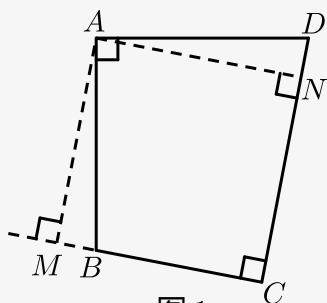


图 1

$$\therefore AM \perp BC, AN \perp CD,$$

$$\therefore \angle AMC = \angle ANC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $AMCN$  为矩形,

$$\therefore \angle MAN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MAN = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MAN - \angle BAN = \angle BAD - \angle BAN,$$

$$\text{即 } \angle MAB = \angle NAD,$$

在  $\triangle AMB$  和  $\triangle AND$  中,

$$\begin{cases} \angle AMB = \angle AND \\ \angle MAB = \angle NAD, \\ AB = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AMB \cong \triangle AND (\text{AAS}),$$

$$\therefore AM = AN,$$

$\therefore$  矩形  $AMCN$  为正方形.

② 由①得, 四边形  $AMCN$  为正方形,

$$\therefore AC \text{ 平分 } \angle BCD, MC = CN = \frac{AC}{\sqrt{2}},$$

$$\text{又 } \triangle AMB \cong \triangle AND,$$

$$\therefore MB = ND,$$

$$\therefore BC + CD = MC - MB + CN + DN$$

$$= MC + CN$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} AC + \frac{\sqrt{2}}{2} AC$$

$$= \sqrt{2} AC.$$

(3) 过  $M$  作  $PM \perp y$  轴,  $QM \perp x$  轴,

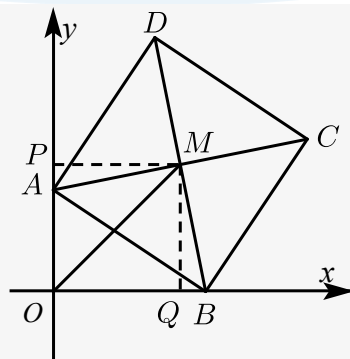
由(2)得四边形  $OQMP$  为正方形,

$$\therefore OM = 5\sqrt{2},$$

$$\therefore QO = MQ = 5,$$

$$\therefore M(5, 5),$$

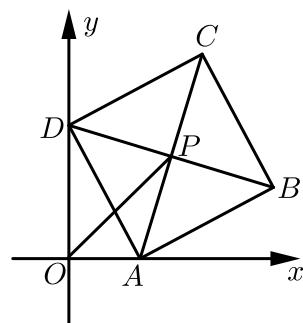
$$\begin{aligned}
 &\because M \text{ 是 } AC \text{ 中点}, A(0, 4), \\
 &\therefore \frac{x_A + x_C}{2} = 5, \\
 &\frac{y_A + y_C}{2} = 5, \\
 &\therefore C(10, 6).
 \end{aligned}$$



【标注】【知识点】与四边形有关的新定义

### 练习3

6. 已知：如图，平面直角坐标系  $xOy$  中，正方形  $ABCD$  的边长为 4，它的顶点  $A$  在  $x$  轴的正半轴上运动，顶点  $D$  在  $y$  轴的正半轴上运动（点  $A$ ， $D$  都不与原点重合），顶点  $B$ ， $C$  都在第一象限，且对角线  $AC$ ， $BD$  相交于点  $P$ ，连接  $OP$ 。



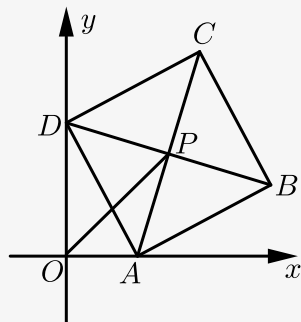
- (1) 当  $OA = OD$  时，点  $D$  的坐标为 \_\_\_\_\_， $\angle POA =$  \_\_\_\_\_ $^\circ$ 。  
 (2) 当  $OA < OD$  时，求证： $OP$  平分  $\angle DOA$ 。  
 (3) 设点  $P$  到  $y$  轴的距离为  $d$ ，则在点  $A$ ， $D$  运动的过程中， $d$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

【答案】(1)  $(0, 2\sqrt{2})$ ; 45

(2) 证明见解析。

(3)  $2 < d \leq 2\sqrt{2}$

【解析】(1)  $\because$  四边形  $ABCD$  为正方形，  
 $\therefore \triangle ADP$  是等腰直角三角形，



又 $\because OA = OD$ ,

$\therefore \triangle AOD$ 是等腰直角三角形,

$\therefore$ 四边形 $AODP$ 是正方形,

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的边长为4,

$\therefore AC = BD = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ ,

$\therefore AP = DP = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ,

$\therefore$ 点 $D$ 的坐标为 $(0, 2\sqrt{2})$ ,  $\angle POA = 45^\circ$ .

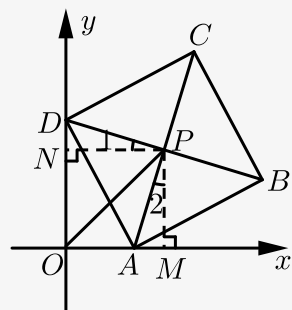
(2) 如图, 过点 $P$ 作 $PM \perp x$ 轴于点 $M$ ,  $PN \perp y$ 轴于点 $N$ ,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore PD = PA$ ,  $\angle DPA = 90^\circ$ ,

$\therefore PM \perp x$ 轴于点 $M$ ,  $PN \perp y$ 轴于点 $N$ ,

$\therefore \angle PMO = \angle PNO = \angle PND = 90^\circ$ ,



$\therefore \angle NOM = 90^\circ$ ,

$\therefore$ 四边形 $NOMP$ 中,  $\angle NPM = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle DPA = \angle NPM$ ,

$\therefore \angle 1 = \angle DPA - \angle NPA$ ,  $\angle 2 = \angle NPM - \angle NPA$ ,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ,

$\therefore$ 在 $\triangle DPN$ 和 $\triangle APM$ 中,  $\begin{cases} \angle PND = \angle PMA \\ \angle 1 = \angle 2 \\ PD = PA \end{cases}$ ,

$\therefore \triangle DPN \cong \triangle APM$  (AAS),

$\therefore PN = PM$ ,

$\therefore OP$ 平分 $\angle DOA$ .

(3) 当  $A$ 、 $O$  重合时, 点  $P$  到  $y$  轴的距离最小,

$$d = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

当  $OA = OD$  时, 点  $P$  到  $y$  轴的距离最大,  $d = PD = 2\sqrt{2}$ ,

$\therefore$  点  $A$ 、 $D$  都不与原点重合,

$$\therefore 2 < d \leq 2\sqrt{2}.$$

**【标注】**【知识点】坐标系中的动点问题 (非函数)

7. 如图1, 将三角板放在正方形  $ABCD$  上, 使三角板的直角顶点  $E$  与正方形  $ABCD$  的顶点  $A$  重合. 三角板的一边交  $CD$  于点  $F$ , 另一边交  $CB$  的延长线于点  $G$ .

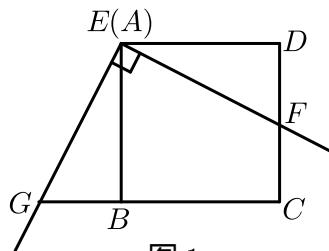


图 1

- (1) 求证:  $EF = EG$ .
- (2) 如图2, 移动三角板, 使顶点  $E$  始终在正方形  $ABCD$  的对角线  $AC$  上, 其他条件不变, (1) 中的结论是否仍然成立? 若成立, 请给予证明; 若不成立, 请说明理由.

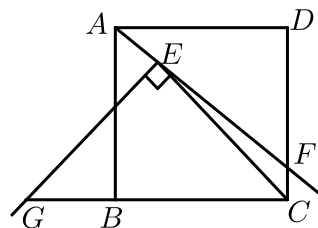


图 2

- (3) 如图3, 将 (2) 中的 “正方形  $ABCD$ ” 改为 “矩形  $ABCD$ ”, 且使三角板的一边经过点  $B$ , 其他条件不变, 若  $AB = a$ ,  $BC = b$ , 求  $\frac{EF}{EG}$  的值.

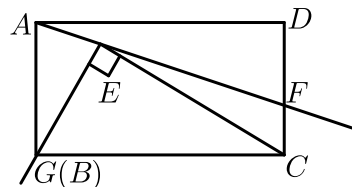


图 3

**【答案】** (1) 证明见解析.

(2) 成立, 证明见解析.

(3)  $\frac{EF}{EG} = \frac{b}{a}.$

【解析】(1)  $\because \angle GEB + \angle BEF = 90^\circ, \angle DEF + \angle BEF = 90^\circ,$

$$\therefore \angle DEF = \angle GEB,$$

在 $\triangle FED$ 和 $\triangle GEB$ 中,

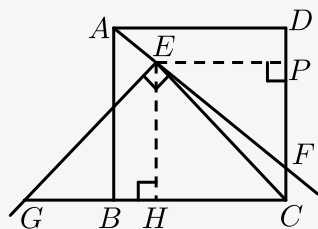
$$\begin{cases} \angle DEF = \angle GEB \\ ED = EB \\ \angle D = \angle EBG \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle FED \cong \text{Rt}\triangle GEB,$$

$$\therefore EF = EG.$$

(2) 成立.

如图, 过点 $E$ 作 $EH \perp BC$ 于 $H$ , 过点 $E$ 作 $EP \perp CD$ 于 $P$ ,



$\because$  四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore CE$ 平分 $\angle BCD$ ,

又 $\because EH \perp BC, EP \perp CD$ ,

$$\therefore EH = EP,$$

$\therefore$  四边形 $EHCP$ 是正方形,

$$\therefore \angle HEP = 90^\circ,$$

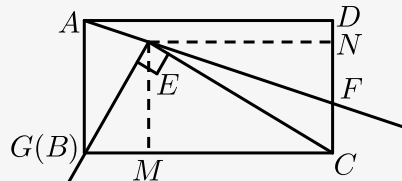
$$\because \angle GEH + \angle HEF = 90^\circ, \angle PEF + \angle HEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PEF = \angle GEH,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle FEP \cong \text{Rt}\triangle CEH,$$

$$\therefore EF = EC.$$

(3) 如图, 过点 $E$ 作 $EM \perp BC$ 于 $M$ , 过点 $E$ 作 $EN \perp CD$ 于 $N$ , 垂足分别为 $M$ 、 $N$ ,



则 $\angle MEN = 90^\circ$ ,

$$\therefore EM \parallel AB, EN \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle CEN \sim \triangle CAD, \triangle CEM \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{NE}{AD} = \frac{CE}{CA}, \frac{EM}{AB} = \frac{CE}{CA},$$

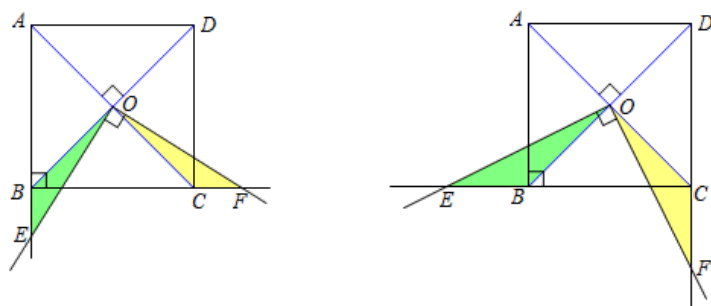
$$\therefore \frac{NE}{AD} = \frac{EM}{AB} \text{ 即 } \frac{NE}{EM} = \frac{AD}{AB} = \frac{CB}{AB} = \frac{b}{a},$$

$$\begin{aligned}
&\because \angle NEF + \angle FEM = \angle GEM + \angle FEM = 90^\circ \\
&\therefore \angle GEM = \angle FEN, \\
&\because \angle GME = \angle FNE = 90^\circ \\
&\therefore \triangle GME \sim \triangle FNE, \\
&\therefore \frac{EF}{EG} = \frac{EN}{EM}, \\
&\therefore \frac{EG}{EF} = \frac{EM}{EN} = \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似模型的构造和应用

## 基本模型二

如图，正方形 $ABCD$ ，对角线 $AC$ 、 $BD$ 交于点 $O$ ， $\angle EOF = 90^\circ$ ，旋转 $\angle EOF$ 与正方形的两边延长线分别交于 $E$ 、 $F$ 。



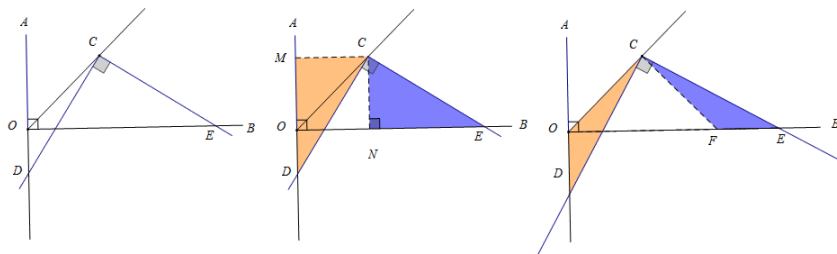
【教法备注】

结论：

- ①  $\triangle BOE \cong \triangle COF$ ， $\triangle AOE \cong \triangle BOF$ 。
- ②  $OE = OF$ ， $EF = \sqrt{2}OE$ 。
- ③ 图一： $S_{\triangle OBF} - S_{\triangle OBE} = \frac{1}{4}S_{\text{正方形}ABCD}$ ；  
图二： $S_{\triangle OCE} - S_{\triangle OCF} = \frac{1}{4}S_{\text{正方形}ABCD}$ 。

## 模型变式2

已知： $\angle AOB = \angle DCE = 90^\circ$ ， $OC$ 平分 $\angle AOB$ ， $D$ 在 $OA$ 反向延长线上， $E$ 在 $OB$ 上。



【教法备注】

辅助线：

(法一) 过点C作 $CM \perp OD$ 于M,  $CN \perp OB$ 于N. 利用角角边证明 $\triangle CMD \cong \triangle CNE$ .

(法二) 将CD绕点C逆时针旋转 $90^\circ$ 交OB于F, 利用角边角证明 $\triangle CDO \cong \triangle CFE$ .

结论：

(1)  $CD = CE$ ;

(2)  $OE - OD = \sqrt{2}OC$ ;

(3)  $S_{\triangle OCE} - S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2}OC^2$ .

#### 练习4

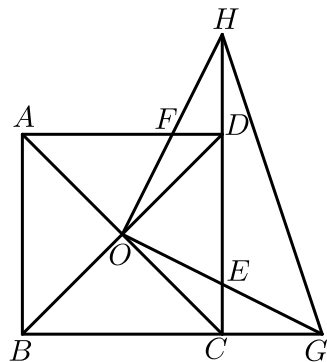
8. 如图, 边长为8的正方形 $ABCD$ 的对角线交于点 $O$ , 点 $E, F$ 分别在边 $CD, DA$ 上( $CE < DE$ ), 且 $\angle EOF = 90^\circ$ ,  $OE, BC$ 的延长线交于点 $G, OF, CD$ 的延长线交于点 $H, E$ 恰为 $OG$ 的中点. 下列结论：

①  $\triangle OCE \cong \triangle ODF$ ;

②  $OG = OH$ ;

③  $GH = 2\sqrt{10}$ .

其中, 正确结论的个数是( ).



A. 0个

B. 1个

C. 2个

D. 3个

【答案】C

【解析】在正方形 $ABCD$ 中,

$$DC = OD, \angle COD = 90^\circ, \angle OCD = \angle ODA = 45^\circ,$$

$$\because \angle GOH = 90^\circ, \therefore \angle COG = \angle DOH,$$

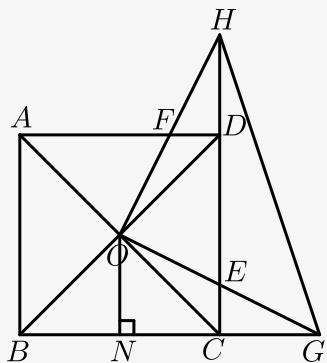
$$\therefore \triangle ODF \cong \triangle OCE(\text{ASA}), \text{故①正确.}$$

$$\angle OCG = \angle ODH = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ,$$

$$\therefore \triangle OCG \cong \triangle ODH(\text{ASA}),$$

$$\therefore OG = OH, \text{故②正确.}$$

过点 $O$ 作 $ON \perp BC$ ,



$$\therefore ON = \frac{1}{2}BC = 4,$$

$$\therefore EC \parallel ON,$$

$$\therefore \triangle ECG \sim \triangle ONG,$$

$$\text{且 } \frac{EG}{OG} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{CG}{NG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CG = HD = 4$$

$$\therefore GH = \sqrt{CG^2 + CH^2} = \sqrt{4^2 + 12^2} = 4\sqrt{10}, \text{ 故③错误.}$$

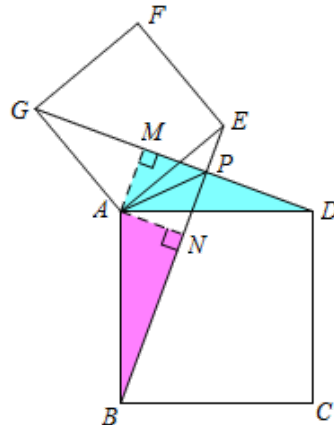
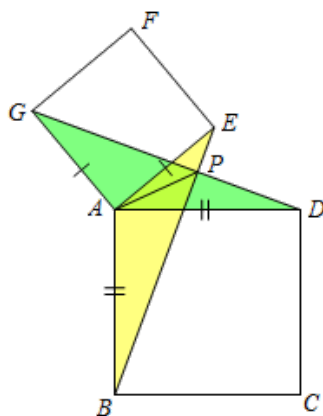
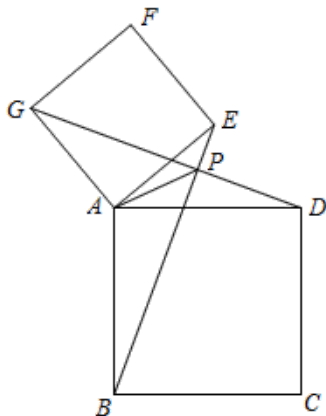
故选C.

【标注】【知识点】正方形与全等综合

## 二、手拉手模型

### 模型结论及证明

已知：如图，四边形 $ABCD$ 、 $AEFG$ 都是正方形，连接 $BE$ 、 $DG$ ， $BE$ 与 $DG$ 交于点 $P$ 。



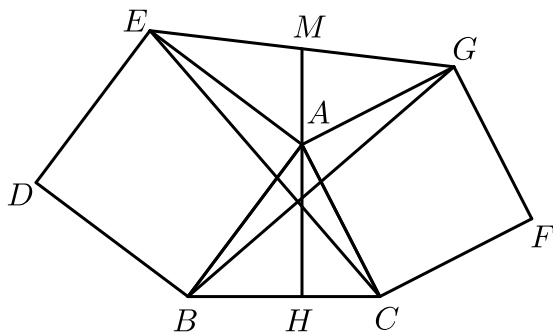
【教法备注】

结论：

- ①  $\triangle BAE \cong \triangle DAG$  ;
- ②  $BE = DG$  ,  $BE \perp DG$  ;
- ③  $AP$  平分  $\angle BPG$  .

### || 例题5

9. 在锐角三角形  $ABC$  中,  $AH$  是  $BC$  边上的高, 分别以  $AB$ ,  $AC$  为一边, 向外作正方形  $ABDE$  和正方形  $ACFG$ , 连接  $CE$ 、 $BG$  和  $EG$ ,  $EG$  与  $HA$  的延长线交于点  $M$ , 下列结论: ①  $BG = CE$ ; ②  $BG \perp CE$ ; ③  $AM$  是  $\triangle AEG$  的中线; ④  $\angle EAM = \angle ABC$ , 其中正确结论的有 \_\_\_\_ (填序号) .



【答案】 ①②③④

【解析】 在正方形  $ABDE$  和正方形  $ACFG$  中,  $AB = AE$ ,  $AC = AG$ ,

$$\angle BAE = \angle CAG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle BAC = \angle CAG + \angle BAC,$$

$$\text{即 } \angle CAE = \angle BAG,$$

$\therefore$  在  $\triangle ABG$  和  $\triangle AEC$  中,

$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle BAG = \angle EAC, \\ AG = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle AEC (\text{SAS}),$$

$$\therefore BG = CE, \text{ 故①正确;}$$

设  $BG$ ,  $CE$  相交于点  $N$ ,

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle AEC,$$

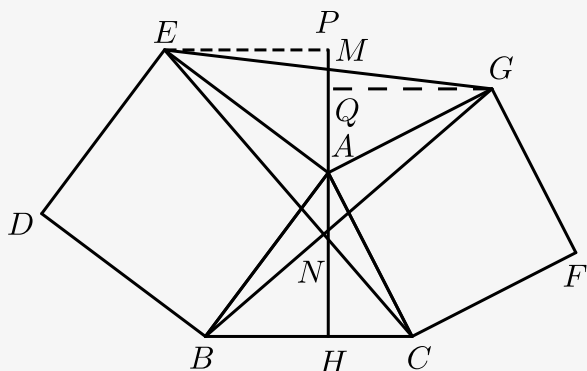
$$\therefore \angle ACE = \angle AGB,$$

$$\therefore \angle NCF + \angle NGF = \angle ACF + \angle AGF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CNG = 360^\circ - (\angle NCF + \angle NGF + \angle F) = 360^\circ - (180^\circ + 90^\circ) = 90^\circ,$$

$$\therefore BG \perp CE, \text{ 故②正确;}$$

过点E作 $EP \perp HA$ 交HA的延长线于点P，过点G作 $GQ \perp AM$ 于点Q，



$\therefore AH \perp BC$ ,

$\therefore \angle ABH + \angle BAH = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BAE = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle EAP + \angle BAH = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ABH = \angle EAP$ ，即 $\angle ABC = \angle EAM$ ，故④正确；

$\therefore$ 在 $\triangle ABH$ 和 $\triangle EAP$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABH = \angle EAP \\ \angle AHB = \angle P = 90^\circ \\ AB = EA \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABH \cong \triangle EAP (AAS)$ ,

$\therefore EP = AH$ ,

同理 $GQ = AH$ ,

$\therefore EP = AH = GQ$ ,

$\therefore$ 在 $\triangle EPM$ 和 $\triangle GQM$ 中，

$$\begin{cases} \angle P = \angle MQG = 90^\circ \\ \angle EMP = \angle GMQ \\ EP = GQ \end{cases}$$

$\therefore \triangle EPM \cong \triangle GQM (AAS)$ ,

$\therefore EM = GM$ ,

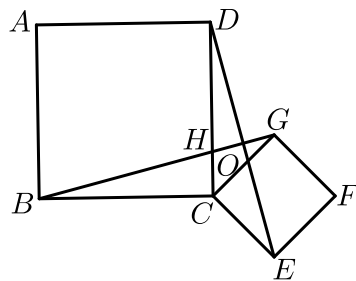
$\therefore AM$ 是 $\triangle AEG$ 的中线，故③正确。

综上所述，①②③④结论都正确。

**【标注】**【知识点】正方形等其他图形的手拉手模型

## 练习5

10. 如图，四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 都是正方形，且 $BC = CD$ ， $CE = CG$ ， $\angle BCD = \angle GCE = 90^\circ$ 。



( 1 ) 求证： $\triangle BCG \cong \triangle DCE$  .

( 2 ) 求证： $BG \perp DE$  .

**【答案】** ( 1 ) 证明见解析 .

( 2 ) 证明见解析 .

**【解析】** ( 1 )  $\because \angle BCD = \angle GCE = 90^\circ$  ,

$$\therefore \angle BCG = \angle DCE ,$$

在 $\triangle BCG$ 与 $\triangle DCE$ 中 ,

$$\begin{cases} BC = CD \\ \angle BCG = \angle DCE , \\ CG = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCG \cong \triangle DCE (\text{SAS}) .$$

( 2 )  $\because \triangle BCG \cong \triangle DCE$  ,

$$\therefore \angle HBC = \angle ODH ,$$

$$\because \angle BHC = \angle DHO , \angle HBC + \angle BHC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ODH + \angle DHO = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DOH = 90^\circ ,$$

$$\therefore BG \perp DE .$$

**【标注】**【能力】推理论证能力

【知识点】SAS

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】正方形的性质

## 例题6

11. 如图1 , 若四边形 $ABCD$ 、 $GFED$ 都是正方形 , 显然图中有 $AG = CE$  ,  $AG \perp CE$  .

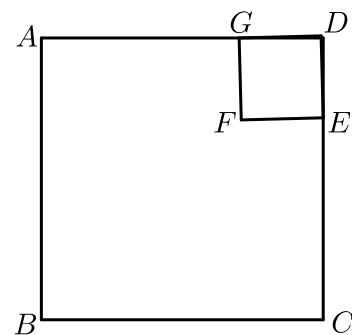


图 1

- ( 1 ) 当正方形  $GFED$  绕  $D$  旋转到如图2的位置时,  $AG = CE$  是否成立? 若成立, 请给出证明, 若不成立, 请说明理由.

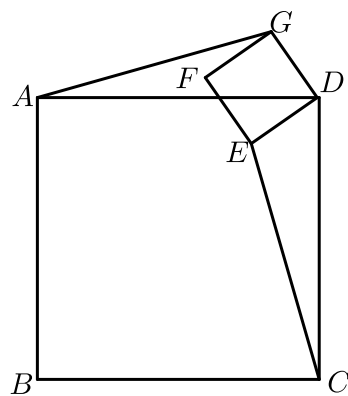
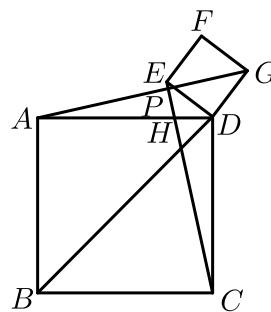


图 2

- ( 2 ) 当正方形  $GFED$  绕  $D$  旋转到  $B, D, G$  在一条直线 (如图3) 上时, 连结  $CE$ , 设  $CE$  分别交  $AG$ 、 $AD$  于  $P$ 、 $H$ .



- ① 求证:  $AG \perp CE$ .
- ② 如果  $AD = 4$ ,  $DG = \sqrt{2}$ , 求  $CE$  的长.

**【答案】** ( 1 )  $AG = CE$  成立.

( 2 ) ① 证明见解析.

②  $CE = \sqrt{26}$ .

**【解析】** ( 1 )  $AG = CE$  成立.

$\because$  四边形  $ABCD$ 、四边形  $DEFG$  是正方形,

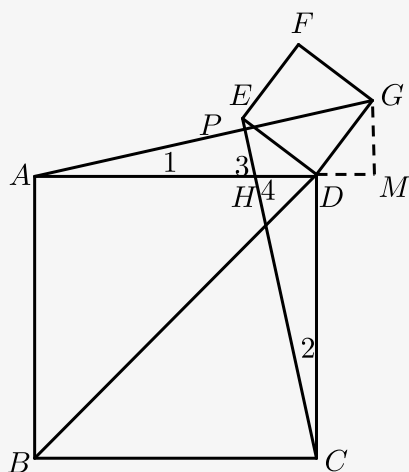
$$\begin{aligned} \therefore GD = DE, AD = DC. \\ \angle GDE = \angle ADC = 90^\circ. \\ \therefore \angle GDA = 90^\circ - \angle ADE = \angle EDC. \\ \therefore \triangle AGD \cong \triangle CED. \\ \therefore AG = CE. \end{aligned}$$

(2) ① 由(1)可知  $\triangle AGD \cong \triangle CED$ ,

$$\begin{aligned} \therefore \angle 1 = \angle 2. \\ \therefore \angle 3 = \angle 4, \angle 4 + \angle 2 = 90^\circ, \\ \therefore \angle 3 + \angle 1 = 90^\circ. \\ \therefore \angle APH = 90^\circ. \\ \therefore AG \perp CH. \end{aligned}$$

② 过G作  $GM \perp AD$  于M.

$\because BD$  是正方形  $ABCD$  的对角线,  
 $\therefore$



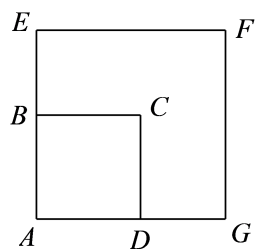
$$\begin{aligned} \angle ADB = \angle GDM = 45^\circ. \\ \therefore \angle DGM = 45^\circ. \\ \therefore DG = \sqrt{2}, \\ \therefore MD = MG = 1. \\ \text{在 Rt}\triangle AMG \text{ 中, 由勾股定理, 得} \\ AG = \sqrt{AM^2 + MG^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}. \\ \therefore CE = AG = \sqrt{26}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

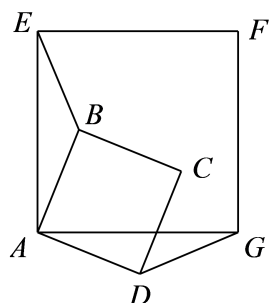
## 练习6

12.

把边长为 $a$ 的正方形 $ABCD$ 和边长为 $2a$ 的正方形 $AEFG$ 按图放置，点 $B$ 、 $D$ 分别在 $AE$ 、 $AG$ 上，将正方形 $ABCD$ 绕点 $A$ 顺时针旋转角 $\alpha$ 。

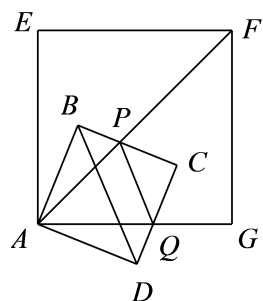


(1) 连接 $BE$ 、 $DG$ ，如图所示，求证： $BE = DG$ 。



(2) 正方形 $ABCD$ 绕点 $A$ 顺时针旋转一周的过程中， $EB$ 能否与 $AD$ 平行？若能，直接写出旋转角 $\alpha$ 的值；若不能说明理由。

(3) 连接 $BD$ 、 $AF$ 。若 $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ， $BC$ 交 $AF$ 于 $P$ ， $CD$ 交 $AG$ 于 $Q$ ，连接 $PQ$ ，如图所示。



① 当 $PQ \parallel BD$ 时，求证： $\angle PAB = \angle QAD$ 。

② 求证：旋转过程中 $\triangle PCQ$ 的周长等于定值 $2a$ 。

**【答案】** (1) 证明见解析。

(2) 能。 $\alpha = 60^\circ$ 或 $300^\circ$ 。

(3) ① 证明见解析。

② 证明见解析。

**【解析】** (1)  $\because \angle EAG = \angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $AE = AG$ ，  
 $\therefore \angle EAB = \angle GAD$ ，

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle DAG (\text{SAS}),$$

$$\therefore BE = DG.$$

(2) 若  $EB \parallel AD$ ,  $\alpha = 60^\circ$  或  $300^\circ$ .

(3) ①  $\because \angle CPQ = \angle CBD = \angle CDB = \angle CQP = 45^\circ$ ,  $CB = CD$ ,

$$\therefore CP = CQ,$$

$$\therefore CB - CP = CD - CQ, \text{ 即 } BP = DQ,$$

$$\text{又 } \because AB = AD, \angle ABP = \angle ADQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ADQ (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle PAB = \angle QAD.$$

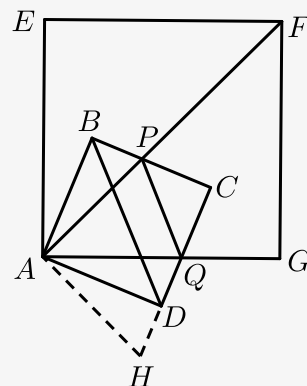
②  $\triangle ABP$  绕点  $A$  旋转  $90^\circ$  得到  $\triangle ADH$ ,

$$AB = AD, \angle ABP = \angle ADH = 90^\circ, BP = DH,$$

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ADH (\text{SAS}),$$

$$\therefore AP = AH, \angle BAP = \angle DAH,$$

$\therefore$



$$\angle PAH = \angle PAD + \angle DAH = \angle PAD + \angle BAP = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAQ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PAQ = \angle HAQ,$$

$$\text{又 } \because AP = AH, AQ = AQ,$$

$$\therefore \triangle PAQ \cong \triangle QAH (\text{SAS}),$$

$$\therefore PQ = HQ = HD + DQ = BP + DQ,$$

$$\therefore \triangle PCQ \text{ 的周长}$$

$$= CP + CQ + PQ = CP + CQ + BP + DQ = CB + CD = 2a.$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

## 例题7

13. 如图1, 正方形  $ABCD$  与正方形  $AEFG$  的边  $AB$ 、 $AE$  ( $AB < AE$ ) 在一条直线上, 正方形  $AEFG$  以点  $A$  为旋转中心逆时针旋转, 设旋转角为  $\alpha$ . 在旋转过程中, 两个正方形只有点  $A$  重合, 其它顶点均不重合, 连接  $BE$ 、 $DG$ .

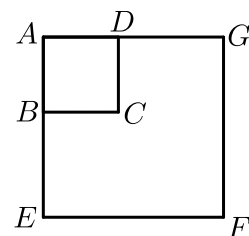


图 1

( 1 ) 当正方形  $AEFG$  旋转至如图2所示的位置时 , 求证 :  $BE = DG$  .

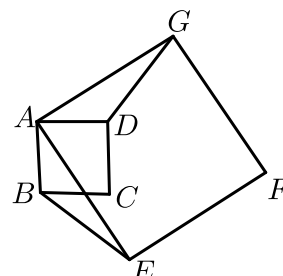


图 2

( 2 ) 如图3 , 如果  $\alpha = 45^\circ$  ,  $AB = 2$  ,  $AE = 4\sqrt{2}$  , 求点  $G$  到  $BE$  的距离 .

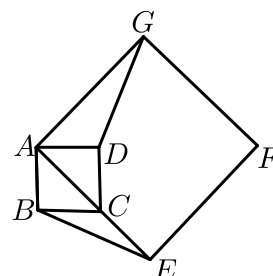


图 3

【答案】 ( 1 ) 证明见解析 .

( 2 ) 点  $G$  到  $BE$  的距离为  $\frac{16\sqrt{5}}{5}$  .

【解析】 ( 1 ) 四边形  $ABCD$  是正方形 ,

$$\therefore AB = AD , \angle BAE + \angle EAD = 90^\circ ,$$

又  $\because$  四边形  $AEFG$  是正方形 .

$$\therefore AE = AG , \angle EAD + \angle DAG = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAG .$$

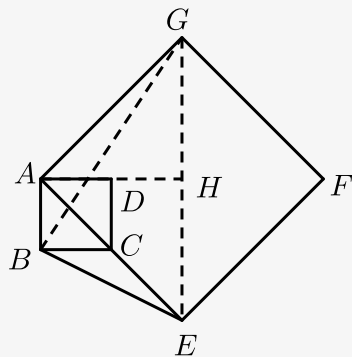
$\therefore$  在  $\triangle ABE$  与  $\triangle ADG$  中 ,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAE = \angle DAG , \\ AE = AG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG \text{ ( SAS )} ,$$

$$\therefore BE = DG .$$

( 2 ) 连接  $GE$ 、 $BG$  , 延长  $AD$  交  $GE$  与  $H$  .



当 $\alpha = 45^\circ$ 时, 则 $\angle BAE = 45^\circ$ .

$\therefore \angle BAD = \angle EAG = 90^\circ$ .

$\therefore \angle EAH = \angle GAH = 45^\circ$ .

又 $\because AE = AG$ ,

$\therefore AH \perp GE$ .

又 $\because AH \perp AB$ ,  $\angle EAH = 45^\circ$ ,

$\therefore \triangle AHE$ 为等腰直角三角形.

$\therefore EH = AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AE = 4$ ,

$\therefore EG = 2EH = 8$ .

$\therefore S_{\triangle BEG} = \frac{1}{2} EG \cdot AH = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ .

设点G到BE的距离为h.  $BE = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ ,

$S_{\triangle BEG} = \frac{1}{2} EB \cdot h = 16$ , 即 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \cdot h = 16$ ,

解得 $h = \frac{16\sqrt{5}}{5}$ .

$\therefore$ 点G到BE的距离为 $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ .

**【标注】**【知识点】旋转性质综合应用

## 练习7

14. 如图1, 点G是正方形ABCD的对角线DB的延长线上任意一点, 以线段BG为边作一个正方形BEFG, 线段CE和AG相交于点H.

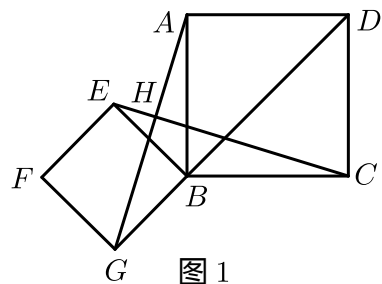
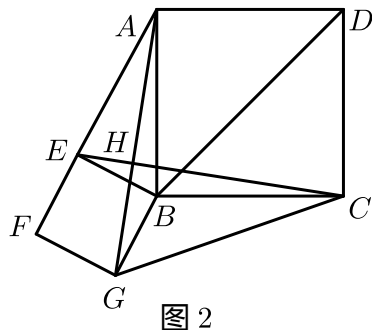


图 1

(1) 求证： $CE = AG$ ， $CE \perp AG$ 。

(2) 若 $AB = \sqrt{2}$ ， $BG = 1$ ，求 $CE$ 的长。

(3) 如图2，正方形 $BEFG$ 绕点 $B$ 逆时针旋转 $\alpha$  ( $0 < \alpha < 90^\circ$ )，连接 $AE$ 、 $CG$ ， $\triangle BCG$ 与 $\triangle ABE$ 的面积之差是否会发生变化？若不变，请求出 $\triangle BCG$ 与 $\triangle ABE$ 的面积之差；若变化，请说明理由。



【答案】(1) 证明见解析。

(2)  $CE = \sqrt{5}$ 。

(3) 不变。

【解析】(1)  $\because$  四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFG$ 是正方形，

$$\therefore BG = BE, AB = BC, \angle EBG = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBG + \angle ABE = \angle ABC + \angle ABE,$$

$$\text{即 } \angle ABG = \angle CBE,$$

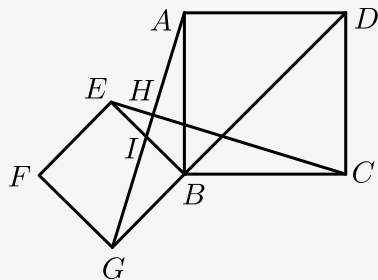
在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle CBE$ 中，

$$\begin{cases} AB = CB \\ \angle ABG = \angle CBE, \\ BG = BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle CBE (\text{SAS}),$$

$$\therefore AG = CE, \angle AGB = \angle CEB,$$

设 $BE$ 和 $AG$ 交点为 $I$ 点，



$$\therefore \angle AGB + \angle GIB = 90^\circ,$$

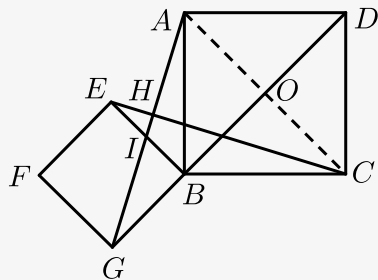
$$\angle GIB = \angle EIH,$$

$$\therefore \angle CEB + \angle EIH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EHI = 90^\circ ,$$

$$\therefore AG \perp CE .$$

( 2 ) 连接  $AC$  交  $BD$  于点  $O$  ,



$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形 ,

$$\therefore AC \perp BD ,$$

$$AO = CO = BO = DO = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1 ,$$

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle AGO$  中 ,

$$GO = BG + BO = 1 + 1 = 2 ,$$

$$AO = 1 ,$$

$$\therefore AG = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} ,$$

$$\text{由 ( 1 ) 得 } CE = AG = \sqrt{5} .$$

( 3 ) 过点  $E$  作  $EM \perp AB$  于点  $M$  ,

过点  $G$  作  $GN \perp BC$  交  $CB$  延长线于点  $N$  ,

$$\because \angle ABN = \angle EBG = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABN - \angle EBN = \angle EBG - \angle EBN ,$$

$$\text{即 } \angle ABE = \angle NBG ,$$

在  $\triangle EBM$  和  $\triangle GBN$  中 ,

$$\begin{cases} \angle EMB = \angle GNB \\ \angle EBM = \angle GBN , \\ BE = BG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EBM \cong \triangle GBN (\text{AAS}) ,$$

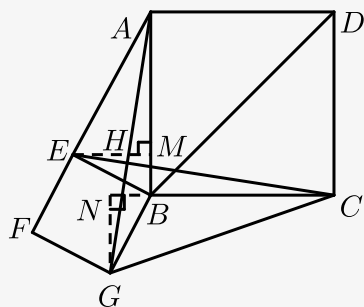
$$\therefore EM = GN ,$$

$$\because S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot EM ,$$

$$S_{\triangle GBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot GN ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle GBC} ,$$

$$S_{\triangle BGC} - S_{\triangle ABE} = 0 .$$



【标注】【知识点】正方形与全等综合

## 练习8

15. 如图，若四边形 $ABCD$ 、四边形 $GFED$ 都是正方形，显然图中有 $AG = CE$ ， $AG \perp CE$ 。

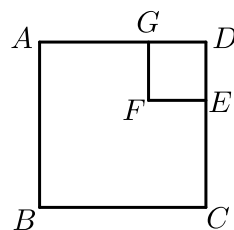


图 1

(1) 当正方形 $GFED$ 绕 $D$ 旋转到如图2的位置时， $AG = CE$ 是否成立？若成立，请给出证明，若不成立，说明理由。

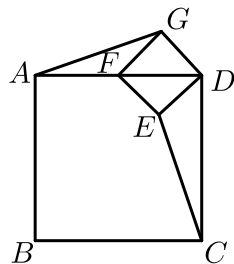


图 2

(2) 若正方形 $GFED$ 绕 $D$ 旋转到如图3的位置（ $F$ 在线段 $AD$ 上）时，延长 $CE$ 交 $AG$ 于 $H$ ，交 $AD$ 于 $M$ 。

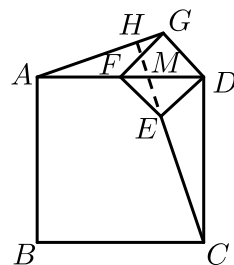


图 3

① 求证： $AG \perp CH$ 。

② 当 $AD = 4$ ， $DG = \sqrt{2}$ 时，求 $CH$ 的长。

(3)

在(2)的条件下,在如图所示的平面上,是否存在以 $A$ 、 $G$ 、 $D$ 、 $N$ 为顶点的四边形为平行四边形的点 $N$ ?如果存在,请在图中画出满足条件的所有点 $N$ 的位置,并直接写出此时 $CN$ 的长度;若不存在,请说明理由.

**【答案】**(1)成立.

(2)① 证明见解析.

$$\textcircled{2} CH = \frac{8\sqrt{10}}{5}.$$

(3)  $CN = \sqrt{34}$ .

**【解析】**(1)如图2,

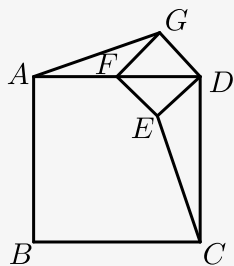


图 2

$$\because \angle CDE + \angle EDA = \angle ADG + \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle CDE,$$

在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle CDE$ 中,

$$\begin{cases} DG = DE \\ \angle ADG = \angle CDE \\ AD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDE (\text{SAS}),$$

$$\therefore AG = CE.$$

(2)① 如图3,过点 $E$ 作 $EP \perp CD$ 于点 $P$ ,连接 $AC$ ,

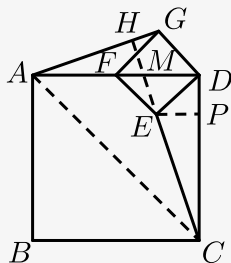


图 3

同(1)可证 $\triangle ADG \cong \triangle CDE$ ,

$$\therefore \angle DAG = \angle DCE,$$

$$\because \angle DCM + \angle DMC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAG + \angle AMH = 90^\circ,$$

$$\therefore AG \perp CH.$$

② 如图3, 过点E作 $EP \perp CD$ 于点P, 连接AC,

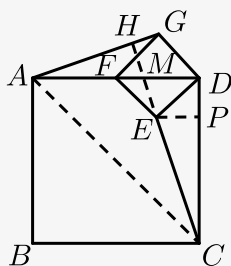


图 3

$$\because \angle EDF = \angle EDC = 45^\circ, DG = \sqrt{2},$$

$$\therefore DP = EP = 1,$$

$$\because CD = AD = 4,$$

$$\therefore CP = 3,$$

$$\therefore CE = \sqrt{10},$$

$$\therefore AG = \sqrt{10},$$

$$\because \angle DAC = \angle ADG = 45^\circ,$$

$$\therefore DG \parallel AC,$$

$$\therefore S_{\triangle AGC} = S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8,$$

$$\because S_{\triangle AGC} = \frac{1}{2} \times AG \times CH,$$

$$\therefore CH = \frac{16}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{5}.$$

( 3 ) ①如图4,  $NADG$ 是平行四边形,

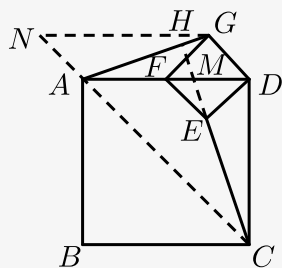


图 4

$$\text{此时, } CN = CA + AN = CA + DG = 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2};$$

②如图5,  $ANDG$ 是平行四边形,

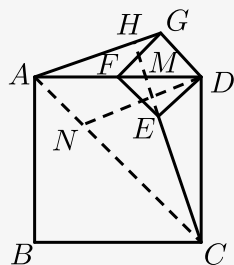


图 5

$$\text{此时, } CN = CA - AN = CA - DG = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2};$$

③如图6， $GADN$ 是平行四边形，延长 $CD$ 交 $GN$ 于点 $R$ ，

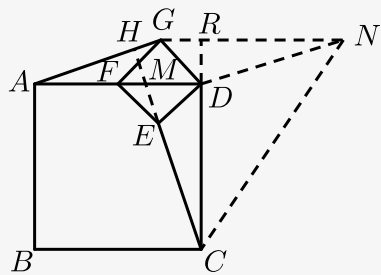


图 6

$$\text{则 } CR = CD + RD = 4 + 1 = 5 ,$$

$$RN = GN - GR = 4 - 1 = 3 ,$$

$$\therefore CN = \sqrt{CR^2 + RN^2} = \sqrt{34} .$$

【标注】【知识点】正方形的性质

【知识点】平行四边形的判定及应用

【知识点】旋转的性质

【知识点】旋转性质综合应用

【知识点】SAS

【能力】推理论证能力

【思想】分类讨论思想